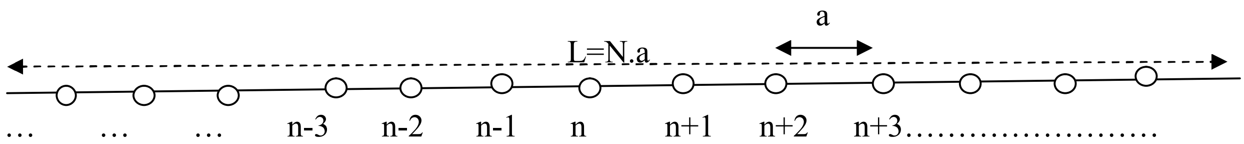
-

CORRIGE TYPE
EXAMEN FINAL (EF) du 12/05/2024

Exercice 1 (5 points)



L'équation du mouvement est :

$$m.\frac{d^2U_n}{dt^2} = \beta(U_{n-1} - U_n) + \beta(U_{n+1} - U_n)$$

$$m.\frac{d^2U_n}{dt^2} = \beta(U_{n+1} + U_{n-1} - 2U_n)$$

Les vibrations de la chaine sont décrites par la fonction d'onde :

$$U_n = A.e^{i.(k.n.a - \omega.t)}$$ (0,5 pt)

En appliquant les conditions aux limites périodiques de Born et Von Karman :

$$U_n = A.e^{i.(k.n.a-\omega.t)} = U_{n+N} = A.e^{i.(k.(n.a+L)-\omega.t)}$$

On déduit après simplification : $e^{i.(kL)} = e^{i.(kNa)} = 1 \Leftrightarrow k.L = 2.\pi.n \Leftrightarrow k = \frac{2.\pi.n}{L}$ avec n : entier relatif.

(0,5 pt)

Le nombre de modes compris dans un intervalle dk de l'espace réciproque est donné par :

$$\frac{dk}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{L}{2\pi}.dk = D(k)dk \text{ on déduit } \quad D(k) = \frac{L}{2\pi}$$ (0,5 pt)

$$D(\omega)d\omega = D(k)dk$$ (0,5 pt)

Sachant qu'à chaque mode correspondent deux valeurs du veteur d'onde +k et –k, et en utilisant l'approximation de Debye $\omega = v_s.k$ on déduit :

$$D(\omega) = 2.D(k)\frac{dk}{d\omega} \qquad \text{d'où} \qquad D(\omega) = \frac{N.a}{\pi.v_s}$$ (1 pt)

On remarque que la densité de modes $D(\omega)$ est dans ce cas indépendante de ω.

- Sachant que le nombre total de modes est N, on peut écrire :
  $$\int_0^{\omega_D} D(\omega).d\omega = N \Leftrightarrow \int_0^{\omega_D} \frac{N.a}{\pi.v_s}.d\omega = N \Leftrightarrow \frac{N.a}{\pi.v_s}\omega_D = N \Leftrightarrow \omega_D = \frac{\pi.v_s}{a}$$ (1 pt)
- Le vecteur d'onde de Debye est déduit de la relation $\omega_D = v_s.k_D \Leftrightarrow k_D = \frac{\omega_D}{v_s}$
  D'où $k_D = \frac{\pi}{a}$ (0,5 pt)
- La température de Debye est déduite à partir de la relation:
  $$\hbar.\omega_D = k_B.\theta_D \Leftrightarrow \theta_D = \frac{\hbar.\omega_D}{k_B} \Leftrightarrow \theta_D = \frac{\hbar.v_{s.}}{k_B}\frac{\pi}{a} = \frac{hv_{s.}}{2ak_B}$$ (0,5 pt)

  avec $\hbar. = \frac{h}{2\pi}$ où h est la constante de Planck et k_B. la constante de Boltzmann

Exercice 2 (5 points)
Modèle d'Einstein

- Expression de l'énergie moyenne des vibrations des atomes
  Le solide est considéré comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantiques vibrant à la même fréquence.

  Soit l'énergie moyenne qui est donnée par :

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{\frac{-n\hbar\omega}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-n\hbar\omega}{k_B T}}} \qquad (1\ \text{pt})$$

On pose $x = -\frac{\hbar\omega}{k_B T}$

D'où

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} \dots}{1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots} = \frac{N}{D}$$

$$\frac{N}{D} == \frac{D'}{D} = \frac{d(\ln(D))}{dx}$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{d(\ln(1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots))}{dx}$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{d(\ln\left(\frac{1}{1-e^x}\right))}{dx} = \hbar\omega \frac{e^x}{1-e^x}$$

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{-x} - 1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

(1 pt)

- Capacité calorifique Cv

$$C_v = \frac{dE_T}{dT}$$

$$E_T = 3N\bar{E}$$

Soit

$$E_T = 3N \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

D'où

$$C_v = 3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)^2} \qquad (1\ \text{pt})$$

- Comportement de Cv à hautes températures :
-

$$k_B T \gg \hbar\omega$$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

$$E_T \approx 3Nk_B T$$

$$C_v = 3Nk_B = 3R$$ (1 pt)

Comportement de Cv à basses températures :

$$k_B T \ll \hbar\omega$$

$$E_T = 3N\hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

$$C_v = 3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

$$Si\, T \to 0, \quad C_v \to 0$$

(1 pt)

Exercice 3 (5 points)

La résistivité de l'aluminium à 20,5°C est $\rho = 2{,}655.10^{-8}\ \Omega.m$ et la mobilité de ses électrons de conduction est $\mu = 1{,}2.10^{-3}\ \mathrm{m^2.V^{-1}.s^{-1}}$

a) Calcul du nombre d'électrons de conduction par cm^3

Sachant que la conductivité est $\sigma = \frac{1}{\rho} = n.e.\mu$, (1 pts)

On déduit : $n = \frac{1}{\rho e.\mu}$ ou bien $n = \frac{\sigma}{e.\mu}$ (1pt)

Application numérique : $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2{,}655.10^{-8}} = 3{,}766.10^{7}$ (0,5pt)

$$n = 1{,}962.10^{29}\ m^{-3}$$ (0,5pt)

b) Calcul du nombre moyen d'électrons de conduction par atome d'aluminium
Le nombre d'atomes d'aluminium par unité de volume est donné par

$$N = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{2700.6{,}023.10^{23}}{27.10^{-3}}$$ (0,5pt)

$$N = 6{,}023.10^{28}\ m^{-3}$$ (0,5pt)

Le nombre moyen d'électrons de conduction par atome Al est donné par :

$$z = \frac{N}{n} = \frac{1{,}962.10^{29}}{6{,}023.10^{28}} = 3{,}257$$ (0,5+0,5 pts)

Exercice 4 (5 points)

L'énergie de Fermi est donnée par :

$$E_F = \frac{hb^2}{2.m}(3.n.\pi^2)^{\frac{2}{3}}$$ (1,5 pt)

Avec n la concentration des électrons par unité de volume :

$$n = \frac{z.\rho.N_A}{M}$$ (0,5 pt)

Z : valence ρ : masse volumique ; N_A : nombre d'Avogadro et M : masse molaire.

	Al	**Ga**	**In**
$\boldsymbol{\rho(g/cm^3)}$	2,7	5,91	7,31
M (g/mole)	26,98	69,72	114,82
Z	3	3	3
$\boldsymbol{n(m^{-3})}$	$1{,}8.10^{29}$	$1{,}53.10^{29}$	$1{,}15.10^{29}$
$\boldsymbol{E_F(joules)}$	$18{,}66.10^{-19}$	$16{,}71.10^{-19}$	$13{,}80.10^{-19}$
$\boldsymbol{E_F(eV)}$	11,66	10,44	8,63
	(0,5 +0,5 pts)	(0,5 +0,5 pts)	(0,5 +0,5 pts)